ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1986

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

N.B. : Ce sujet comporte 4 pages de texte.

Etant donné un nombre complexe A, on lui associe la suite récurrente dans le plan complexe :

$$w_0 = 0 \quad ; \quad n \geq 0 \quad : \quad w_{n+1} = w_n^2 + A.$$

On se propose d'étudier certaines propriétés de cette suite suivant la position du point image de A dans le plan complexe.

I

1. Expliciter les éléments w_1, w_2, w_3.

   Montrer que pour $n \geq 1$, w_n est égal à un polynôme de degré 2^{n-1} en A, à coefficients dans $\mathbb{N}$, dont le terme de plus bas degré est A.

   Pour quelle valeur de A la suite est-elle constante ?

Pour $A \neq 0$ et $q \geq 1$, montrer que la suite (w_n) est constante seulement à partir du rang q si et seulement si l'on a $w_q + w_{q-1} = 0$.

Pour quelles valeurs de A, (w_n) est-elle constante à partir de $q = 2$?

2. On dira que la suite (w_n) est 2-périodique à partir du rang q si l'on a : $w_{n+2} = w_n$ pour tout $n \geq q$, et si q est le plus petit entier pour lequel cette propriété est réalisée. Etudier les deux cas $q = 0$ et $q = 2$.

3. Montrer que si $|A| > 2$, on a $\lim_{n \to +\infty} |w_n| = +\infty$ (on pourra pour $n \geq 1$ montrer que $|w_n| \geq |A|\ (|A|-1)^{n-1}$). Prouver qu'il en est de même s'il existe un rang q pour lequel $|w_q| > 2$.

   En est-il de même si $|A| = 2$? Et si $|w_q| = 2$?

II

1. Etudier la suite (w_n) pour A réel positif. Lorsque la suite converge, exprimer sa limite L en fonction de A. On notera (b_n) la suite associée à la valeur particulière $A = \frac{1}{4}$.

2. On considère A complexe avec $|A| \leq \frac{1}{4}$. Montrer qu'on a les relations :

   $\forall n \geq 0 \quad |w_n| \leq b_n$ et $|w_{n+1} - w_n| \leq b_{n+1} - b_n$ où (b_n) est la suite définie au 1.

   En déduire la convergence de la suite (w_n) vers un nombre complexe L(A), avec $|L(A)| \leq \frac{1}{2}$.

T. S.V.P.

Page 230 bis 1986 Ec. Nat. des ing. des trav. rur. et des tech. san. de Strasbourg
Math 1 (option physique-math.

Montrer que lorsque l'on prend $A = \frac{1}{4} e^{i\alpha}$, α variant dans $[0,2\pi]$, le point image du complexe $Z = L(A) - \frac{1}{2}$ parcourt l'arc de courbe d'équation polaire:

$\rho = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos 2\theta}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Etudier et tracer cet arc.

3. On considère le cas $A \in]-1,0[$. Montrer que w_n est un réel compris entre A et 0. Montrer que la suite (w_{2n}) est décroissante et la suite (w_{2n+1}) croissante. Pour quelles valeurs de A la suite (w_n) est-elle convergente ?

III

On se propose de trouver des valeurs de A pour lesquelles la suite (w_n) converge. On suppose dans cette section que la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

1. En examinant le comportement de $\left|\frac{w_{n+2} - w_{n+1}}{w_{n+1} - w_n}\right|$, montrer que si (w_n) a une limite L quand $n \to +\infty$, alors $|L| \leqslant \frac{1}{2}$. Quelle relation doit être vérifiée entre L et A ?

2. On considère pour $L = Re^{it}$, R fixé dans l'intervalle $]0,\frac{1}{2}[$ et t variant dans $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_R$ que décrit le point image du complexe $X + iY = L - L^2$. Etudier les variations de X et Y en fonction de t. Indiquer les différentes allures de $\mathcal{C}_R$ suivant les valeurs de R. Tracer $\mathcal{C}_R$ pour $R = \frac{1}{4}$; $R = \frac{2}{5}$; $R = \frac{1}{2}$.

3. L étant un complexe de module inférieur à $\frac{1}{2}$, on considère la suite (w_n) associée à $A = L - L^2$. On pose $2L = U$ et $w_n - L = U^{n+1} a_n(U)$.

a) Montrer que la suite $(a_n(U))$ peut être définie par les relations :

$a_0(U) = -\frac{1}{2}$; $n \geqslant 0$ $a_{n+1}(U) = a_n(U)(1+U^n a_n(U))$.

Expliciter $a_1(U)$ et $a_2(U)$.

b) On suppose qu'il existe un réel $R \in]0,1[$ et un entier q tels que :

$\forall U$, $|U| \leqslant R$: $R^q |a_q(U)| \leqslant M$ avec $M = \frac{1-R}{R}$.

Montrer qu'alors $R^n |a_n(U)| \leqslant M$ pour $n \geqslant q$.

Pour $|U| < R$, quel est le rayon de convergence de la série entière de la variable Z: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n(U)\right)^2 Z^n$? En déduire que $a_n(U)$ a une limite quand $n \to \infty$, et que la suite (w_n) associée à la valeur $A = \frac{U}{2} - \frac{U^2}{4}$ converge.

Déterminer les valeurs optimales de R obtenues en prenant $q = 0, 1, 2$.

Ec.Nat. des Ing. des trav.rur. et des tech.san. de Strasbourg 1986 page 231
Math I.Option physique-math.